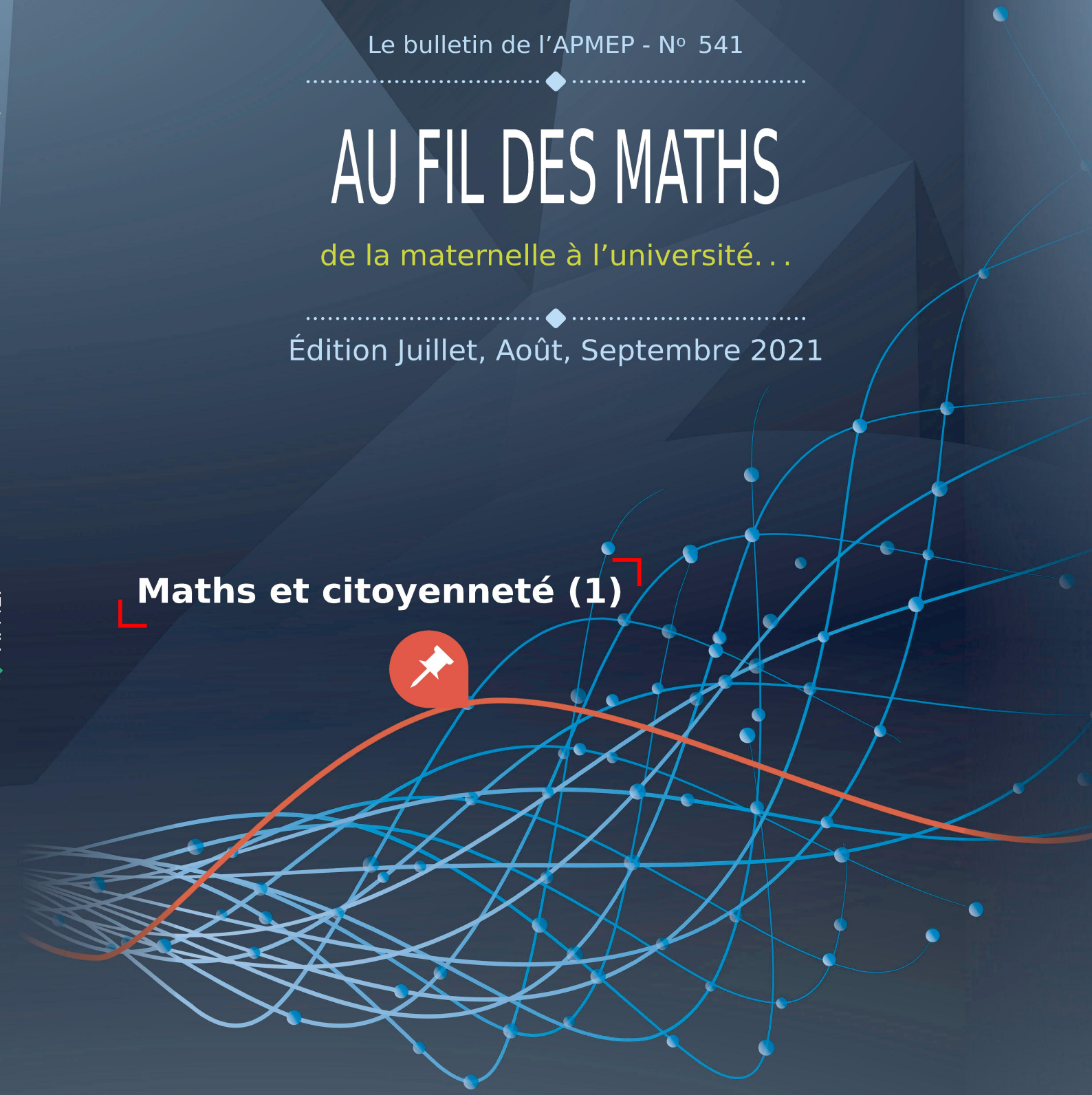
Le bulletin de l'APMEP - N° 541

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Juillet, Août, Septembre 2021

Maths et citoyenneté (1)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée : **https://afdm.apmep.fr**
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille Génin mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2021-2022 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François Pétiard
Dépôt légal : Septembre 2021
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

AU FIL DES MATHS

Sur la récurrence et la dichotomie au lycée

Les nouveaux programmes de 2009-2010 ont introduit des éléments d'algorithmique et programmation en classe de Seconde, puis les ont étendus à l'ensemble du lycée en cours de mathématiques. De fait, l'informatique est souvent perçue comme un outil au service de la reine des sciences. Le présent article essaie de montrer que la rigueur des mathématiques est aussi une aide précieuse lors du développement d'algorithmes. Le thème choisi autour de la récurrence est volontairement à la frontière du programme.

Jean-Paul Roy

Préambule : la programmation en cours de maths

Les récents programmes des collèges et lycées introduisent un thème *pensée algorithmique* dans les cours de technologie et de mathématiques. Même si on le réduit souvent à un *apprentissage de la programmation*, il s'agit bel et bien de mettre en place des mécanismes de résolution de problèmes ayant le bon goût de se prêter à un codage sur ordinateur. La quantité de temps dévolue reste limitée afin de ne pas trop empiéter sur l'acquisition du savoir classique, mais bien réelle car notre pays doit être au diapason des avancées scientifiques en cours dans le monde entier. La pandémie récente a eu comme effet collatéral de faire gagner de quelques années la numérisation en cours de la société.

Pour les lycées, le langage de programmation quasi imposé est Python, le collège utilisant plutôt les tableurs ou le langage de première approche Scratch. Le langage Python permet de coder une séquence d'actions comportant des instructions d'affectation (donner une valeur à une variable[1]), des instructions conditionnelles `if... else...` pour prendre une décision, et des instructions de boucle `for` et `while` pour coder un processus répétitif. Il s'agit essentiellement de partir de certaines données sur lesquelles le programme va calculer, pour afficher un résultat final, ou dessiner un graphique, ou produire un son à partir de sinusoïdes mélangées, pourquoi pas ?

Exemple : calcul de $n!$

Prenons l'exemple du calcul de la factorielle de n dont la valeur est le produit des entiers de 1 jusqu'à n. L'algorithme (méthode de calcul systématique) est simple : nous allons prendre une variable nommée par exemple `res` comme *résultat*, que nous allons multiplier par chaque entier de 2 jusqu'à n inclus. Cette variable résultat aura une valeur initiale de 1 (et non 0, qui est une erreur courante des élèves). Dans ce qui suit, je n'entre pas dans les détails grammaticaux du langage Python. Le caractère # indique le début d'un commentaire destiné au lecteur et ignoré à l'exécution. La distance à la marge (obligatoire) indique la logique des instructions : le décalage

1. Exemple d'affectation : `x=2` ou `x=x+1`, le signe `=` se lisant *devient égal à*. L'égalité mathématique se note `==`.

à droite ci-dessous précise quelles sont les instructions répétées en boucle.

Programme factorielle

```
n = 20
res = 1
for k in range(2,n+1):  # pour k dans [2 ; n+1[
    res = res * k
print('Factorielle de ',n,' : ',res)
```

Exécution

```
Factorielle de 20 : 2432902008176640000
```

Une bonne pratique consiste à encapsuler le calcul de la factorielle de n dans une fonction `fac` à un paramètre, qui prendra n comme argument et retournera en résultat sa factorielle. Une fonction se voit alors comme une *boîte noire* (un circuit virtuel) prenant zéro, une ou plusieurs entrées et retournant zéro, un ou plusieurs résultats[2]. En voici une définition :

Fonction fac

```
def fac(n):          # n entier > 0
    res = 1
    for k in range(2,n+1):
        res = res * k
    return res       # renvoyer le résultat

print('Factorielle de 20 : ',fac(20))
```

Exécution

```
Factorielle de 20 : 2432902008176640000
```

Dans cette optique, programmer consiste à construire de telles boîtes noires fonctionnelles et à les connecter pour résoudre un problème. Un peu à la manière d'un électronicien qui construit un circuit imprimé à partir de composants.

Le matheux habitué à définir la factorielle par récurrence :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ (n-1)! \times n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

sera sans doute heurté par la nécessité de passer par une boucle `for` étrangère à la pensée mathématique pure. Peut-on coder telle quelle la définition ci-dessus en Python ?

La récurrence

Dans le programme de Première spécialité maths, les aspects calculatoires sont mis en avant, ce qui est une bonne chose pour tout le monde (du scientifique au simple praticien du calcul), et l'introduction du thème *algorithmique et programmation*, enseigné dans le cadre du cours de mathématiques, était attendu depuis des lustres. Mais les activités autour de la démonstration et plus généralement de la *rigueur* — remplacée par un large appel à l'intuition — m'ont paru manquer d'assurance, notamment dans le cours d'analyse.

Prenons l'exemple de la récurrence. Celle-ci est hors-programme en Première, aussi bien en maths qu'en programmation. Pourquoi avoir choisi d'enseigner les *suites définies par récurrence* sans aborder, simplement mais franchement, le principe de récurrence, dans sa double articulation : démontrer et construire, en profitant de la symbiose entre le cours de mathématiques et celui d'algorithmique ?

Les exemples fournis dans les livres de maths de Première (pour ne citer que ce niveau) utilisent essentiellement la boucle `for`. Cela est pertinent dans le cadre d'un cours de physique, où le déroulement temporel et pas à pas d'un algorithme se comprend. Mais dans un contexte de *mathématiques*, il me paraît intéressant d'insister sur les concepts de fonction (ce que demandent d'ailleurs les instructions officielles) et de récurrence (mise étrangement de côté). Je laisse aux matheux le soin de se battre (ou pas) pour faire émerger la récurrence comme technique de démonstration en Première dans le cadre du travail sur la *preuve*, qui me semble tardif. J'ai souvent eu l'occasion d'entendre les plaintes des professeurs de mathématiques en Licence sur la difficulté des étudiants à rédiger une démonstration simple en 2e voire 3e année. Ayant étudié dans les années 1970, on me taxera peut-être de nostalgique : j'assume.

2. Une fonction peut ne retourner aucun résultat, par exemple si elle se contente d'afficher du texte.

Il existe des dizaines de langages autres que Python, mais tous se rattachent à une ou plusieurs manières majeures de programmer. Un langage de programmation est un véhicule de la pensée : il permet d'exprimer des idées et de les organiser à travers une méthodologie qui lui est propre. Les langages impératifs s'appuient sur les variables et les instructions qui vont les modifier, dont la conditionnelle et la boucle ; Python en fait partie. Les langages orientés objets permettent de construire un monde d'objets communiquant par envois de messages. Les langages fonctionnels mettent en avant le concept de fonction et remplacent la boucle par la récurrence[3].

Ces trois paradigmes de programmation ne sont pas les seuls et Python utilise les deux premiers en s'autorisant quelques incursions dans le troisième, gage d'une certaine souplesse. Cela permet au programmeur de choisir celui qui lui paraît le plus adapté à une tâche. Ça calcule et c'est propre (à la preuve de correction près).

Arrêtons-nous un peu sur le modèle *fonctionnel*, celui des modifications *temporaires* de mémoire issues de la substitution $x = a$, $y = b$ des arguments a et b aux paramètres x, y d'une fonction f, produisant la valeur de sortie $f(a, b)$. Que les dites fonctions puissent être composées n'étonnera personne, ni qu'une fonction fasse appel à elle-même ! La définition par récurrence de la fonction $n \mapsto n!$ serait :

Fonction facr

```
def facr(n):          # récurrence sur n entier
    if n == 0:        # le cas de base
        return 1
    else:
        return facr(n-1) * n
print('Factorielle de 20 :',facr(20))
```

Ce programme est plus adapté à la machine qu'à l'humain car il nécessite de *descendre* jusqu'au cas de base avant de commencer à calculer, donc de mettre en mémoire les multiplications en attente.

$$\begin{aligned}
&\texttt{facr}(3)\\
&\quad\rightsquigarrow \texttt{facr}(2)\times 3\\
&\quad\rightsquigarrow (\texttt{facr}(1)\times 2)\times 3\\
&\quad\rightsquigarrow ((\texttt{facr}(0)\times 1)\times 2)\times 3\\
&\quad\rightsquigarrow ((1\times 1)\times 2)\times 3\\
&\quad\rightsquigarrow (1\times 2)\times 3\\
&\quad\rightsquigarrow 2\times 3\\
&\quad\rightsquigarrow \boxed{6}
\end{aligned}$$

A contrario, avec une boucle `for`, les calculs se font pas à pas avec une quantité de mémoire réduite.

Le professeur de mathématiques ne dit pas autre chose lorsqu'il écrit $u_0 = -4$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Programmer le calcul du terme général u_n avec une boucle `for` permettra de l'obtenir :

Fonction u en impératif

```
def u(n):                 # pour n entier
    res = -4
    for i in range(n):
        res = 2*res + 3
    return res
```

Il me paraît tout à fait naturel de programmer *par récurrence* la définition de cette suite qui est définie *par récurrence*, c'est la moindre des choses. Et la justification informatique du calcul est au même niveau que la justification mathématique de la définition (une suite est une fonction). Mais attention, en programmation, on passe de $n-1$ à n et jamais de n à $n+1$, ce serait peut-être l'occasion pour nous matheux de nous mettre à jour ?

Fonction u en récursif

```
def u(n):         # récurrence sur n entier
    if n == 0:
        return -4
    else:
        return 2*u(n-1) + 3
```

3. Dans cet article, je considère comme synonymes les termes *récursivité* et *récurrence*.

Cela fonctionne, et cela explosera si n dépasse une certaine limite (à cause des calculs en attente, dont le nombre est borné). Ce sera l'occasion d'expliquer la limitation des machines pour calculer et de justifier l'écriture d'une boucle plus efficace, ce qui n'est pas toujours faisable facilement. L'élégance de la définition originale est conservée et souvent suffisante. Et nous savons tous que le travail sur l'élégance n'est pas un luxe pour former un jeune aux mathématiques.

La récurrence en programmation a longtemps été considérée comme la *cerise sur le gâteau*. Elle est désormais tenue comme fondamentale, notamment dans la conception des algorithmes, quitte à les programmer avec une boucle ou toute autre optimisation par la suite si besoin.

La récurrence terminale

Les programmeurs, exploitant quotidiennement divers paradigmes de calcul, programment aussi certaines fonctions par récurrence. Mais ils savent quelque chose sur la récurrence qui a échappé pendant un siècle aux mathématiciens lorsqu'ils disent que la seconde version de la fonction `u` ci-dessus *n'est pas une boucle*. Non parce qu'elle n'utilise pas le mot `for` ou `while`, mais parce que lorsque la fonction `u` s'est invoquée elle-même pour obtenir le résultat de l'hypothèse de récurrence `u(n-1)`, *il reste autre chose à faire* : il faut continuer le calcul en multipliant ce résultat par 2 puis rajouter 3.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{u}(3)\\
&\quad\rightsquigarrow \mathrm{u}(2)\times 2+3\\
&\quad\rightsquigarrow (\mathrm{u}(1)\times 2+3)\times 2+3\\
&\quad\rightsquigarrow ((\mathrm{u}(0)\times 2+3)\times 2+3)\times 2+3\\
&\quad\rightsquigarrow ((-4\times 2+3)\times 2+3)\times 2+3\\
&\quad\rightsquigarrow (-5\times 2+3)\times 2+3\\
&\quad\rightsquigarrow -7\times 2+3\\
&\quad\rightsquigarrow \boxed{-11}
\end{aligned}$$

Comment ? Se pourrait-il qu'il ne reste rien à faire ? Mais oui, déjà dans un exemple bien connu : le PGCD « à la Euclide ». Ce dernier nous a appris dans ses *Éléments* que le PGCD des entiers naturels a et b n'était autre que le PGCD de b et de a *modulo* b. Le passage de b à a *modulo* b convergeant vers $b=0$, l'algorithme s'écrit en Python, où *modulo* est l'opérateur `%` :

Fonction pgcd en récursif

```
def pgcd(a,b):              # a,b entiers
    if b == 0:
        return a
    return pgcd(b,a % b) # récurrence terminale
```

Après que la fonction `pgcd` s'est invoquée elle-même, il ne reste plus rien d'autre à faire, on dit que la récurrence est terminale. Formidable élégance de cet algorithme ! En réfléchissant un peu, on s'aperçoit que le rôle de la fonction `pgcd` consiste simplement à transformer le couple (a,b) en le couple $(b,a\%b)$ jusqu'à ce que b devienne nul.

$$\begin{aligned}
&pgcd(12,30)\\
&\quad\rightsquigarrow pgcd(30,12)\\
&\quad\rightsquigarrow pgcd(12,6)\\
&\quad\rightsquigarrow pgcd(6,0)\\
&\quad\rightsquigarrow \boxed{6}
\end{aligned}$$

Aussitôt vu, aussitôt programmé avec une boucle, puisqu'*au fond il semble se comporter comme une boucle* ! Cette fois, le nombre de tours de boucle n'est pas connu[4] et nous utiliserons la seconde boucle de Python nommée `while (tant que)`.

Fonction pgcd en impératif

```
def pgcd(a,b):
    while b > 0:
        (a,b) = (b,a % b)  # = devient égal à
    return a
```

Sinon, en se privant de la belle *affectation entre couples* offerte par Python et utilisée ci-dessus :

4. Son ordre de grandeur est logarithmique en $\min(a,b)$.

Fonction pgcd en impératif

```
def pgcd(a,b):
    while b > 0:
        temp = a     # variable temporaire
        a = b
        b = temp % b
    return a
```

La dichotomie

Il m'arrive de voir, dans des ouvrages traitant d'algorithmes, des descriptions brutales avec une boucle `for` par exemple, qui sentent l'astuce à plein nez et demandent une réflexion avant de se convaincre de leur correction. Prenons le cas de la multiplication égyptienne. Je lis dans une page web d'un centre de formation :

> *Lorsqu'on utilise cette méthode égyptienne pour multiplier deux nombres a et b avec du papier et un crayon, on construit deux colonnes de nombres dont la première ligne est constituée des deux nombres a et b. Les lignes suivantes sont obtenues dans la colonne de gauche en multipliant par deux le nombre précédent, et dans la colonne de droite en le divisant par deux (quotient entier `//`). On stoppe lorsque le nombre de droite vaut 1. Le produit $a \times b$ est alors égal à la somme des nombres de la colonne de gauche dont le nombre correspondant à droite est impair.*

Méthode claire, testons-la avec $a = 33$ et $b = 18$. Le tableau ci-contre donne bien

$33 \times 18 = 528 + 66 = 594$,

avec uniquement des additions ($a + a$ au lieu de $2a$) ainsi que des divisions par 2.

33	18
66	9
132	4
264	2
528	1
1 056	0

L'algorithme semble fonctionner : je peux le mettre en machine. Faire l'addition $528 + 66$ à la fin m'imposerait de gérer la liste des lignes, je la ferai donc au fur et à mesure en gérant une variable résultat `res` en troisième colonne. Pour mon propos, je vous laisse le faire car en vérité j'ai autre chose en tête : la compréhension de cet algorithme. En l'observant attentivement, nous pouvons le saisir. Lorsque b est pair, la ligne suivante aura le même produit ab. Lorsque b est impair, le produit diminuera de a car b `//` 2 — le quotient entier — est en réalité $(b-1)/2$ donc le nouveau produit sera $2 \times a \times (b-1)/2 = ab - a$, il faudra donc rajouter a. Ce raisonnement vaut ce qu'il vaut. Est-il vraiment *mathématique* ? Sans doute, dans l'esprit des Anciens, qui décrivaient les calculs faits à la main pour convaincre le lecteur. Cela ne vaut pas un bon raisonnement algébrique, n'est-ce pas ?

Autre exemple de dichotomie : le calcul d'une puissance x^n, où n est un entier naturel. Combien d'étudiants ai-je vu sécher sur un calcul *par boucle et dichotomique* de x^n, donc en divisant à chaque tour de boucle l'exposant n par 2 ? Pourtant un raisonnement par récurrence découpe immédiatement l'algorithme en trois cas. Prenons comme hypothèse de récurrence : pour tout y, je sais calculer $y^{n//2}$.

$$x^0 = 1$$
$$x^n = (x \times x)^{n//2} \quad \text{si } n \text{ est pair} > 0$$
$$x^n = (x \times x)^{n//2} \times x \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

Fonction puis_dicho en récurssif

```
def puis_dicho(x,n):  # x^n par dichotomie
    if n == 0:
        return 1                    # (1)
    if n % 2 == 0:
        return puis_dicho(x*x,n//2) # (2)
    return puis_dicho(x*x,n//2) * x # (3)
```

Difficile de faire plus concis. Mathématiquement clair, pas de problème pour prouver sa correction (par récurrence). La décroissance rapide de l'exposant n, gros avantage de la dichotomie[5], n'impose pas ici une version avec une boucle, mais cherchons-la pour le plaisir (ou parce que la récurrence est hélas hors-programme)... Je résiste

5. Le nombre de divisions de n par 2 est logarithmique.

à la tentation de refaire le coup de la multiplication égyptienne, en bricolant une boucle qui fera ce calcul. Je vous propose plutôt de bien regarder la structure de la fonction `puis_dicho`, notamment les lignes (2) et (3). La ligne (2) se comporte *comme une boucle* puisque il n'y a plus rien à faire après l'appel à `puis_dicho`. Ce n'est pas le cas de la ligne (3) : il restera à multiplier par `x`. Pouvons-nous forcer ces deux lignes à avoir la même forme ? Oui, elle calculent toutes les deux une puissance `puis_dicho(...)` multipliée par un nombre : 1 ou `x`. Introduisons donc la fonction auxiliaire $\boxed{f(a,b,c) = a^b \times c}$ et cherchons une définition intrinsèque de la fonction f n'utilisant ni l'opérateur puissance `**` de Python ni la fonction `puis_dicho`.

- *Si* $b = 0$, utilisons (1) :
$$f(a,0,c) = a^0 \times c = c$$
- *sinon si* b est pair, utilisons (2) :
$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= a^b \times c = (a\times a)^{b//2} \times c \\ &= f(a\times a, b//2, c) \end{aligned}$$
- *sinon* c'est que b est impair, utilisons (3) :
$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= a^b \times c = ((a\times a)^{b//2} \times a) \times c \\ &= a^b \times c = (a\times a)^{b//2} \times (a\times c) \\ &= f(a\times a, b//2, a\times c) \end{aligned}$$

D'où la définition par récurrence de f :

Fonction f

```
def f(a,b,c):          # renvoie a^b * c
    if b == 0:
        return c                    # (1')
    if b % 2 == 0:
        return f(a*a,b//2,c)        # (2')
    return f(a*a,b//2,a*c)          # (3')

def puis_dicho(x,n):  # renvoie x^n
    return f(x,n,1)
```

Nous voilà bien avancés, me direz-vous ? Ah, mais cette fois, il n'y a plus rien à faire après l'appel à `f` en lignes (2') et (3'). La récurrence est *terminale*, elle peut être transformée à vue en une boucle, que nous rédigeons en fusionnant les deux fonctions précédentes.

Fonction puis_dicho en impératif

```
def puis_dicho(x,n):
    res = 1
    while n > 0:    # évolution de x,n,res
        if n % 2 == 0:
            (x,n) = (x*x,n//2)
        else:
            (x,n,res) = (x*x,n//2,res*x)
    return res
```

Je vous laisse sur cette *transformation de programme*. L'*euréka* vient de la généralisation de la forme du résultat. Les matheux connaissent bien la puissance de la généralisation. Ici, pour calculer a^b, nous nous sommes ramenés au calcul de $a^b \times c$: vous avez dit bizarre ?

Une telle généralisation n'est pas toujours aussi facile mais le fait de pouvoir *calculer un programme* ne vaut-il pas le détour ? Vous pourrez faire la même chose avec la multiplication égyptienne en vous inspirant de la récurrence :

$$a \times b = (a+a) \times \frac{b}{2}$$

et en suivant le même chemin pour obtenir une *déduction* mathématiquement saine de l'algorithme égyptien...

P.-S. Je me suis inspiré de la solution en ligne de l'exercice 11.19 de mon livre :
Python. Apprentissage actif. Pour l'étudiant et le futur enseignant (Ellipses, 2020).

Jean-Paul Roy a commencé sa carrière par six années d'enseignement en lycée durant lesquelles, dans le cadre d'un travail avec l'IREM de Paris, il a expérimenté un enseignement de la programmation en Terminale, avec les langages Lisp, Logo, Pascal et Prolog. Il a poursuivi dans cette voie en étant mis à disposition d'un centre de formation des enseignants du Secondaire à l'université Paris 6 jusqu'en 1991 où il a pris un poste de PRAG (PRofesseur AGrégé) au département informatique de l'université de Nice. Il est retraité depuis 2017.

Sommaire du nº 541

Maths et citoyenneté (1)

APMEP

www.apmep.fr